INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL MONSEÑOR AGUSTÍN GUTIÉRREZ

GUÍA DE TRABAJO

ASIGNATURA	Matemáticas	**CURSO**	Décimo
DOCENTE	Diego Felipe Rodríguez	**PERIODO**	Cuarto
FECHA DE INICIO	septiembre 2020	**FECHA DE TERMINACIÓN**	noviembre 2020
COMPETENCIA	**Competencia General:** Comprende el uso de la probabilidad para aplicarla en situaciones reales para tomar decisiones.		
	Competencia Específica: Entiende y aplica las propiedades de las probabilidades para resolver problemas.		
DESEMPEÑOS	**PARA APRENDER**	Comprende el concepto de probabilidad y lo aplica en situaciones problema.	
	PARA HACER	Resuelve problemas aplicando las leyes de la probabilidad.	
	PARA SER	Lograr que el estudiante sea responsable y autónomo en la entrega de trabajos.	
	PARA CONVIVIR	Reconoce la importancia de la aplicación de conceptos matemáticos al mejoramiento de su entorno.	
DBA	Predice la posibilidad de ocurrencia de un evento simple a partir de la relación entre los elementos del espacio muestral y los elementos del evento definido.		
ESTANDAR	Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas		

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Con frecuencia, en la probabilidad de un evento influye el hecho de que un evento relacionado con él ya haya ocurrido. Suponga que tiene un evento A cuya probabilidad es P(A). Si obtiene información nueva y sabe que un evento relacionado con él, denotado por B, ya ha ocurrido, deseará aprovechar esta información y volver a calcular la probabilidad del evento A.A esta nueva probabilidad del evento Ase le conoce como probabilidad condicional y se expresa P(A| B). La notación | indica que se está considerando la probabilidad del evento A dada la condición de que el evento B ha ocurrido. Por tanto, la notación $P(A|\, B)$ se lee “la probabilidad de A dado B”.

Como ejemplo de la probabilidad condicional, considere el caso de las promociones de los agentes de policía de una determinada ciudad. La fuerza policiaca consta de 1200 agentes, 960 hombres y 240 mujeres. De éstos, en los últimos dos años, fueron promovidos 340. En la tabla 4.4 se muestra cómo quedaron repartidas estas promociones entre los hombres y mujeres.

Después de analizar el registro de las promociones, un comité femenil protestó, ya que habían sido promovidos 288 agentes hombres, frente a sólo 36 mujeres. Los directivos de la fuerza policiaca argumentaron que el número de mujeres promovidas no se debía a una discriminación, sino a que el número de mujeres que son agentes de policía es una cantidad pequeña. Ahora verá cómo emplear la probabilidad condicional para analizar esta acusación de discriminación.

Sean

M = el evento que un agente de policía sea hombre
W = el evento que un agente de policía sea mujer
A = el evento que un agente de policía sea promovido
A^c = el evento que un agente de policía no sea promovido

Dividir los valores de los datos de la tabla 1 entre el total de agentes de policía, 1200, permite concretar la información que se tiene en las probabilidades siguientes.

$P(M \cap A) = 288/1200 = 0.24 =$ probabilidad de que un agente de policía, escogido en forma aleatoria, sea hombre *y* haya sido promovido
$P(M \cap A^c) = 672/1200 = 0.56 =$ probabilidad de que un agente de policía, escogido en forma aleatoria, sea hombre *y* no haya sido promovido
$P(W \cap A) = 36/1200 = 0.03 =$ probabilidad de que un agente de policía, escogido en forma aleatoria, sea mujer *y* haya sido promovido
$P(W \cap A^c) = 204/1200 = 0.17 =$ probabilidad de que un agente de policía, escogido en forma aleatoria, sea mujer *y* no haya sido promovido

TABLA 1. PROMOCIONES, EN LOS ÚLTIMOS DOS AÑOS, DE LOS AGENTES DE POLICÍA

	Hombre	Mujer	Total
Promovido	288	36	324
No promovido	672	204	876
Total	960	240	1200

Como cada uno de estos valores da la probabilidad de la intersección de dos eventos, se les llama probabilidades conjuntas. A la tabla 2, que proporciona la información de las probabilidades de promoción de los agentes de policía, se le conoce como tabla de probabilidades conjuntas.

TABLA 2. TABLA DE PROBABILIDAD CONJUNTA PARA LAS PROMOCIONES

Las probabilidades conjuntas aparecen en el cuerpo de la tabla.

	Hombre (M)	Mujer (W)	Total
Promovido (A)	0.24	0.03	0.27
No promovido (A^c)	0.56	0.17	0.73
Total	0.80	0.20	1.00

Las probabilidades marginales aparecen en los márgenes de la tabla.

Las cantidades que aparecen en los márgenes de una tabla de las probabilidades conjuntas son las probabilidades de cada uno de los eventos por separado. Es decir, $P(M) = 0.80$, $P(W) = 0.20$, $P(A) = 0.27$, $P(A^c) = 0.73$. A estas probabilidades se les conoce como probabilidades marginales por encontrarse en los márgenes de una tabla de probabilidad conjunta.

Observe que las probabilidades marginales se obtienen al sumar las probabilidades conjuntas del renglón o columna correspondiente de la tabla de probabilidades conjuntas. Por ejemplo, la probabilidad marginal de ser promovido es $P(A) = P(M \cap A) + P(W \cap A) = 0.24 + 0.03 = 0.27$. En las probabilidades marginales se observa que 80% de la fuerza policiaca está formada por hombres y 20% por mujeres, que 27% de los agentes de policía fueron promovidos y 73% no fueron promovidos.

Ahora empiece con el análisis de la probabilidad condicional calculando la probabilidad de que un agente de policía sea promovido dado que ese agente sea hombre. Emplee la notación para probabilidad condicional para determinar $P(A|M)$. Para calcular $P(A|M)$ se observa, primero, que esta notación sólo significa que se considera la probabilidad del evento A (promoción) ya que la condición designada como evento M (que el agente de policía sea hombre) está dada. Así que $P(A|\,M)$ indica que sólo interesan los promovidos dentro de los 960 agentes de policía que son hombres. Como 288 de los 960 agentes de policía que son hombres fueron promovidos, la probabilidad de ser promovido dado que se es un agente hombre es $288/960 = 0.30$. En otras palabras, puesto que un agente de policía es hombre, ese agente tuvo 30% de probabilidades de ser promovido en los dos últimos años.

Resultó fácil aplicar este procedimiento, ya que en la tabla 1 se muestra el número de agentes de policía en cada categoría. Ahora es interesante mostrar cómo calcular probabilidades condicionales, como $P(A|\,M)$, a partir de las probabilidades de eventos relacionados y no a partir de los datos de frecuencias de la tabla 1.

$$P(A \mid M) = \frac{288}{960} = \frac{288/1200}{960/1200} = \frac{0.24}{0.80} = 0.30$$

Observe que la probabilidad condicional se obtiene de 0.24/0.80. Regrese a la tabla de probabilidad conjunta (tabla 2) y observe que 0.24 es la probabilidad conjunta de A y M; es decir, $P(A \cap M) = 0.24$; también que 0.80 es la probabilidad marginal de que un agente de la policía seleccionado aleatoriamente sea hombre. Es decir, $P(M) = 0.80$. Por tanto, la probabilidad condicional $P(A|\,M)$ se calcula como la razón entre $P(A \cap M)$ y la probabilidad marginal $P(M)$.

$$P(A \mid M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{0.24}{0.80} = 0.30$$

El hecho de que la probabilidad condicional se pueda calcular como la razón entre una probabilidad conjunta respecto a una probabilidad marginal proporciona la siguiente fórmula para el cálculo de la probabilidad condicional de dos eventos A y B.

PROBABILIDAD CONDICIONAL

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

o

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ahora, considere de nuevo el asunto de la discriminación contra las mujeres agentes de policía. La probabilidad marginal del renglón 1 de la tabla 4.5 indica que la probabilidad de que un agente de la policía sea promovido (ya sea hombre o mujer) es $P(A) = 0.27$. Sin embargo, la cuestión relevante en el caso de la discriminación tiene que ver con las probabilidades condicionales $P(A|\, M)$ y $P(A|\, W)$. Es decir, ¿cuál es la probabilidad de que un agente de la policía sea promovido dado que es hombre y cuál es la probabilidad que un agente de la policía sea promovido dado que es mujer? Si estas dos probabilidades son iguales, no hay fundamentos para un argumento de discriminación ya que las oportunidades de ser promovidos son las mismas para agentes de la policía hombres o mujeres. Pero, si hay diferencia entre estas dos probabilidades condicionales se confirmará que los hombres y mujeres agentes de policía son considerados de manera distinta cuando se trata de las decisiones para promoverlos.

Ya se determinó que $P(A|\, M) = 0.30$. Ahora use los valores de probabilidad de la tabla 2 y las ecuaciones dadas de probabilidad condicional para calcular la probabilidad de que un agente de la policía sea promovido dado que es mujer; es decir, $P(A|\, W)$. Use la ecuaciones con W en lugar de B.

$$P(A \mid W) = \frac{P(A \cap W)}{P(W)} = \frac{0.03}{0.20} = 0.15$$

¿Qué conclusión obtiene? La probabilidad de que un agente de policía sea promovido dado que es hombre es 0.30, el doble de 0.15, que es la probabilidad de que un agente de policía sea promovido dado que es mujer. Aunque el uso de la probabilidad condicional no demuestra por sí misma que haya discriminación en este caso, los valores de probabilidad condicional confirman el argumento presentado por las mujeres agentes de policía.

Eventos independientes

EVENTOS INDEPENDIENTES

Dos eventos A y B son independientes si

$$P(A \mid B) = P(A)$$

o

$$P(B \mid A) = P(B)$$

Si no es así, los eventos son dependientes.

Ley de la multiplicación

Mientras que la ley de las suma de probabilidades sirve para calcular la probabilidad de la unión de dos eventos, la ley de la multiplicación es útil para calcular la probabilidad de la intersección de dos eventos. La ley de la multiplicación se basa en la definición de probabilidad condicional. Al despejar en las ecuaciones $P(A \cap B)$, se obtiene la ley de la multiplicación.

LEY DE LA MULTIPLICACIÓN

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$$

o

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$$

Para ilustrar el uso de la ley de la multiplicación, considere el caso del departamento de circulación de un periódico al que 84% de los hogares de cierta región están suscritos a la edición diaria del periódico. Si D denota el evento un hogar suscrito a la edición diaria, $P(D) = 0.84$. Además, sabe que la probabilidad de que un hogar ya suscrito a la edición diaria se suscriba también a la edición dominical (evento S) es 0.75; esto es, $P(S|D) = 0.75$.

¿Cuál es la probabilidad de que un hogar se subscriba a ambas, a la edición diaria y a la dominical? Emplee la ley de la multiplicación y calcule la probabilidad deseada, $P(S \cap D)$.

$$P(S \cap D) = P(D)P(S \mid D) = 0.84(0.75) = 0.63$$

Así, sabe que 63% de los hogares se suscriben a ambas ediciones, a la diaria y a la dominical.

LEY DE LA MULTIPLICACIÓN PARA EVENTOS INDEPENDIENTES

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Para calcular la probabilidad de la intersección de dos eventos independientes, simplemente se multiplican las probabilidades correspondientes. Observe que la ley de la multiplicación para eventos independientes proporciona otra manera de determinar si dos eventos son independientes. Es decir, si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, entonces Ay B son independientes; si $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, entonces A y B son dependientes.

Como una aplicación de la ley de la multiplicación para eventos independientes considere el caso del jefe de una gasolinería que por experiencia sabe que 80% de los clientes usan tarjeta de crédito al pagar la gasolina. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos siguientes clientes paguen la gasolina con tarjeta de crédito?

Sean

$$A = \text{el evento el primer cliente paga con tarjeta de crédito}$$
$$B = \text{el evento el segundo cliente paga con tarjeta de crédito}$$

Entonces el evento que interesa es $A \cap B$. Si no hay ninguna otra información, será razonable suponer que A y B son eventos independientes. Por tanto,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0.80)(0.80) = 0.64$$

Para concluir esta sección, observe que el interés por la probabilidad condicional surgió porque los eventos suelen estar relacionados. En esos casos, los eventos son dependientes y para calcular la probabilidad de estos eventos se usan las fórmulas para probabilidad condicional de las ecuaciones. Si dos eventos no están relacionados, son independientes; en este caso a las probabilidades de ninguno de los eventos les afecta el hecho de que el otro evento ocurra o no.

ACTIVIDAD

1. Suponga dos eventos, Ay B, y que $P(A) = 0.50$, $P(B) = 0.60$ y $P(A \cap B) = 0.40$.
   a. Halle $P(A| B)$.
   b. Halle $P(B \mid A)$.
   c. ¿A y B son independientes? ¿Por qué sí o por qué no?
2. Suponga dos eventos, A y B, que son mutuamente excluyentes. Admita, además, que $P(A) = 0.30$ y $P(B) = 0.40$.
   a. Obtenga $P(A \cap B)$.
   b. Calcule $P(A| B)$.

c. Un estudiante de estadística argumenta que los conceptos de eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes son en realidad lo mismo y que si los eventos son mutuamente excluyentes deben ser también independientes. ¿Está usted de acuerdo? Use la información sobre las probabilidades para justificar su respuesta.
d. Dados los resultados obtenidos, ¿qué conclusión sacaría usted acerca de los eventos mutuamente excluyentes e independientes?

3. Debido al aumento de los costos de los seguros, en Estados Unidos 43 millones de personas no cuentan con un seguro médico (Time, 1 de diciembre de 2003). En la tabla siguiente se muestran datos muestrales representativos de la cantidad de personas que cuentan con seguro médico.

		Seguro médico	
		Sí	No
Edad	18 a 34	750	170
	35 o mayor	950	130

a. Con estos datos elabore una tabla de probabilidad conjunta y úsela para responder las preguntas restantes.
b. ¿Qué indican las probabilidades marginales acerca de la edad de la población de Estados Unidos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tomada en forma aleatoria no tenga seguro médico?
d. Si la persona tiene entre 18 y 34 años, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga seguro médico?
e. Si la persona tiene 34 años o más ¿cuál es la probabilidad de que no tenga seguro médico?
f. Si la persona no tiene seguro médico, ¿cuál es la probabilidad de que tenga entre 18 y 34 años?
g. ¿Qué indica esta información acerca del seguro médico en Estados Unidos?

4. Una muestra de estudiantes de la maestría en administración de negocios, arrojó la siguiente información sobre la principal razón que tuvieron los estudiantes para elegir la escuela en donde hacen sus estudios.

		Razones de su elección			
		Calidad de la escuela	Costo de la escuela	Otras	Totales
Tipo de estudiante	Tiempo completo	421	393	76	890
	Medio tiempo	400	593	46	1039
	Totales	821	986	122	1929

a. Con estos datos elabore una tabla de probabilidad conjunta.
b. Use las probabilidades marginales: calidad de la escuela, costo de la escuela y otras para comentar cuál es la principal razón por la que eligen una escuela.
c. Si es un estudiante de tiempo completo, ¿cuál es la probabilidad de que la principal razón para su elección de la escuela haya sido la calidad de la escuela?
d. d. Si es un estudiante de medio tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que la principal razón para su elección de la escuela haya sido la calidad de la escuela?

e. Si A denota el evento es estudiante de tiempo completo y B denota el evento la calidad de la escuela fue la primera razón para su elección, ¿son independientes los eventos A y B? Justifique su respuesta.

5. El Departamento de Estadística Laboral de Estados Unidos reúne datos sobre las ocupaciones de las personas entre 25 y 64 años. La tabla siguiente presenta el número de hombres y mujeres (en millones) en cada una de las categorías ocupacionales.

Ocupación	Hombres	Mujeres
Directivo/Profesional	19 079	19 021
Enseñanza/Ventas/ Administrativo	11 079	19 315
Servicio	4 977	7 947
Producción con precisión	11 682	1 138
Operadores/Obrero	10 576	3 482
Agricultura/Ganadería/Silvicultura/Pesca	1 838	514

a. Desarrolle una tabla de probabilidad conjunta.
b. ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador mujer sea directivo o profesional?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador hombre esté en producción con precisión?
d. ¿Es la ocupación independiente del género? Justifique su respuesta con el cálculo de la probabilidad.

SALIDA.

Evaluación, refuerzo o planes de mejoramiento.

a. **HETEROEVALUACIÓN**: Cada una de las actividades realizadas tendrá su respectiva calificación. Se tendrá en cuenta, la participación y la calidad de los trabajos.

b. AUTOEVALUACIÓN: Marca con una X la valoración que crees merecer.

CRITERIO	1	2	3	4	5
Dedico el tiempo suficiente para la preparación de las actividades y evaluaciones					
Contribuyo con mi buen comportamiento en el desarrollo de las clases.					
Busco asesoría de compañeros o docente cuando me surgen duras en el proceso de aprendizaje.					
Asumo con responsabilidad el desarrollo de las actividades de clase cuando trabajo en forma individual o en grupo.					
Llevo mis apuntes en el cuaderno de forma clara y ordenada.					
Asisto puntualmente a clase de acuerdo con los horarios establecidos.					
Presento oportunamente mis trabajos y tareas acuerdo con las fechas establecidas.					
Participo activamente en clase contribuyendo al buen desarrollo de la misma.					
Presento los materiales necesarios para el desarrollo de la clase haciendo buen uso de los mismos.					

Aprovecho los espacios de refuerzo y recuperación, para mejorar mis desempeños.					

c. **COEVALUACIÓN:** Cada estudiante socializa en plenaria las valoraciones de la auto-evaluación. Los compañeros participan con mucho respeto para manifestar si esas valoraciones corresponden o no a la realidad y hacer los ajustes del caso.